19/12/2016

(S) $(py')' + (q+\lambda r)y = 0 \quad , x\in(a,b)$

(C) $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$

$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (S)-(C) έχει άπειρες ιδιοτιμές. Οι ιδιοτιμές αυτές είναι όροι μιας ακολουθίας $(\lambda_\nu)$ με $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n\to+\infty$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

(i) Αν $y_0$ ιδιοσυνάρτηση του (S-C) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0$, τότε όλες οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην $\lambda_0$ είναι οι $cy_0$, $c\neq0$ (c: σταθερά).

(ii) Αν $y_1, y_2$ ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ τότε $\int_a^b r(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx = 0$.

ΑΠΟΔ

(i) Αν $y_0$ ιδιοσυνάρτηση $\Rightarrow$ $cy_0$ επίσης ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0$.

Ας είναι $y, \tilde{y}$ δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_0$. Θα αποδείξω ότι $\exists$ c: σταθερά με $\tilde{y}=cy$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(py')' + (q+\lambda_0 r)y = 0\\ (p\tilde{y}')' + (q+\lambda_0 r)\tilde{y} = 0\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(Abel)} p(x)\,W(y,\tilde{y})(x) = k$$

Επίσης:

$$\left.\begin{aligned}a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0\\ a_1 \tilde{y}(a) + a_2 \tilde{y}'(a) = 0\end{aligned}\right|$$

Δηλαδή, το σύστημα (ως προς $a_1, a_2$) έχει μη μηδενική λύση (λόγω της υπόθεσης $|a_1|+|a_2|\neq0$)

Επομένως, $D=\begin{vmatrix} y(a) & \tilde{y}(a)\\ y'(a) & \tilde{y}'(a)\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow W(y,\tilde{y})(a)=0$

$\Rightarrow W(y,\tilde{y})(x)=0 \quad , x\in(a,b) \Rightarrow y,\tilde{y}$ γραμμικώς εξαρτημένες.

(ii) Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(py_1')' + (q+\lambda_1 r)y_1 = 0\\ (py_2')' + (q+\lambda_2 r)y_2 = 0\end{aligned}\right| \begin{matrix} y_2 \\ y_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_2(py_1')' + (q+\lambda_1 r)y_1y_2 = 0 \quad , x\in(a,b)\\ y_1(py_2')' + (q+\lambda_2 r)y_1y_2 = 0 \end{aligned}$$

$$y_2(py_1')' - y_1(py_2')' + (\lambda_1-\lambda_2) r y_1 y_2 = 0 \quad , x\in(a,b)$$

Κάνω ολοκλήρωση:

$$\int_a^b y_2(py_1')'\,dx - \int_a^b y_1(py_2')'\,dx + (\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b r y_1 y_2\,dx = 0$$

και $(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^b r y_1 y_2\,dx = \left[y_2 p y_1'\right]_a^b - \int_a^b \cancel{y_2' p y_1'}\,dx - \left[y_1 p y_2'\right]_a^b + \int_a^b \cancel{y_1' p y_2'}\,dx$

$= y_2(b)p(b)y_1'(b) - y_2(a)p(a)y_1'(a) - y_1(b)p(b)y_2'(b) + y_1(a)p(a)y_2'(a)$

$= p(b)\underbrace{\left[y_2(b)y_1'(b) - y_1(b)y_2'(b)\right]}_{=0} - p(a)\underbrace{\left[y_2(a)y_1'(a) - y_1(a)y_2'(a)\right]}_{=0}$

Επειδή οι $y_1, y_2$ ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (c) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} a_1y_1(a) + a_2y_1'(a) = 0\\ a_1y_2(a) + a_2y_2'(a) = 0\\ \text{με } |a_1|+|a_2| \neq 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a)\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = 0$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι $y_1(b)y_2'(b) - y_2(b)y_1'(b) = 0$ και συνεπώς $\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = 0$.

<u>π.χ.</u> $y'' + \lambda y = 0 \quad , x\in[0,\pi] \quad , y(0) = 0 = y'(\pi)$.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις.

ΛΥΣΗ

(i) <u>$\lambda=0$</u>: $y''=0 \Rightarrow$ Β.Σ.Λ. $=\{1, x\} \Rightarrow y(x) = C_1 + C_2\cdot x \Rightarrow \underline{y=0}$

(ii) <u>$\lambda<0$</u>: $y''-|\lambda|y = 0$, Β.Σ.Λ. $=\{e^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot x}, e^{\sqrt{|\lambda|}x}\}$

$\Rightarrow y(x) = C_1e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + C_2e^{\sqrt{|\lambda|}x}$

$y(0) = 0 = y'(\pi) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

(iii) <u>$\lambda>0$</u>: $y''+\lambda y = 0$, Β.Σ.Λ $=\{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$

$\Rightarrow y(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x) \quad , x\in[0,\pi]$.

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y'(\pi)=0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = \nu\pi+\frac{\pi}{2}, \ \nu=0,1,\dots \Rightarrow$

$\sqrt{\lambda}=\nu+\frac{1}{2}, \ \nu=0,\dots \Rightarrow \boxed{\lambda_\nu=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2, \nu=0,1,\dots}$ ιδιοτιμές

και $\boxed{y_\nu = c\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\right], \ \nu=0,1,\dots}$ ιδιοσυναρτήσεις

(Δ) $(py')'+qy=0$, $p(x)>0$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν $y$ μη μηδενική λύση της (Δ) στο διάστημα $I$ και $J$ συμπαγές υποδιάστημα του $I$ τότε η $y$ δεν μπορεί να μηδενίζεται σε άπειρα σημεία του $J$.

ΑΠΟΔ

Ας είναι $y\,(\neq 0)$ λύση της Δ στο $J$ συμπαγές υποδιάστημα του $I$. Υποθέτουμε ότι η $y$ μηδενίζεται σε άπειρα σημεία της $J$. Τότε, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, $\exists\, x_\nu$ ακολουθία ριζών της $y$ στο $J$ με $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0 \in J$.

Είναι: $0=\lim_{\nu\to\infty} y(x_\nu) = y\left(\lim_{\nu\to\infty} x_\nu\right) = y(x_0)$, δηλαδή $y(x_0)=0$.

Από το θ. Rolle $\left(\begin{matrix} x_\nu \uparrow x_0 \\ x_\nu<\xi_\nu<x_{\nu+1}\end{matrix}\right)$ $\exists\, \xi_1\to x_0$ με $y'(\xi_\nu)=0$ και συνεπώς

$0=\lim_{\nu\to\infty} y'(\xi_\nu) = y'\left(\lim_{\nu\to\infty}\xi_\nu\right) = y'(x_0)$, δηλαδή $y'(x_0)=0$.

Επομένως η $y$ είναι λύση του Δ που ικανοποιεί (...)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ας είναι $y_1, y_2$ λύσεις της (Δ) στο $I$.

(i) Αν οι $y_1, y_2$ έχουν κοινή ρίζα τότε οι $y_1, y_2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

(ii) Αν $y_1 \neq y_2$ και οι $y_1, y_2$ γραμμικώς εξαρτημένες τότε οι $y_1, y_2$ έχουν κοινές ρίζες.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Sturm)

Αν $y_1, y_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της $(\Delta)$, τότε μεταξύ δύο ριζών της $y_1$ υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της $y_2$.

ΑΠΟΔ

Ας είναι $x_1, x_2$ διαδοχικές ρίζες της λύσης $y_1$. Επειδή οι $y_2, y_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οι $x_1, x_2$ δεν είναι ρίζες της $y_2$.
Υποθέτουμε ότι η $y_2$ δεν έχει ρίζα στο $(x_1, x_2)$. Τότε, (λόγω συνέχειας) η $y_2$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[x_1, x_2]$.
Έστω ότι $y_2(x) > 0$, $x \in [x_1, x_2]$.
Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ είναι καλά ορισμένη και παραγωγίσιμη με $h(x_1) = 0 = h(x_2)$. Άρα (Θ. Rolle) $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : h'(x_0) = 0$, δηλαδή:

$$0 = \frac{y_1'(x_0)\, y_2(x_0) - y_2'(x_0)\, y_1(x_0)}{y_2^2(x_0)} \Rightarrow W(y_1, y_2)(x_0) = 0 \text{ , άτοπο!}$$

Άρα, η $y_2$ έχει ρίζα μεταξύ των $x_1, x_2$.

Εφαρμογή: $y''(x) + y = 0$, $\cos x, \sin x \longrightarrow x_\nu = \nu\pi$

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1 \neq 0$

Πρόταση: Θεωρώ τις εξισώσεις:

$(\Delta)$ $(py')' + Qy = 0$

$(\tilde{\Delta})$ $(py')' + \tilde{Q}y = 0$

(A) Αν $Q \leq 0$ στο $I$, τότε κάθε μη μηδενική λύση της $(\Delta)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $I$.

(B) Αν $Q \geq 0$, $I = (0, +\infty)$, τότε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{p}\, dx = +\infty = \int_1^{+\infty} Q\, dx$

$\Rightarrow$ κάθε μη τετριμμένη λύση της $(\Delta)$ έχει άπειρες ρίζες στο $I$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Σύγκριση Sturm)

Υποθέτουμε ότι $\tilde{Q}(x) \geq Q(x)$, $x \in I$. Αν $y, \tilde{y}$ λύσεις της $(\Delta)$, $(\tilde{\Delta})$ αντίστοιχα, και $x_1, x_2$ διαδοχικές ρίζες της $y$, τότε η $\tilde{y}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_1, x_2)$.